DIDATTICA DELLE SCIENZE

Numero 69 dell'aprile 1977

Sommario

Fascicolo di 36 pagine più inserti redazionali.

Inserto

Con *l'emancipazione dall'acqua* si apre una nuova fase nella filogenesi dei vegetali. Su questo argomento si incentra anche la quarta parte del nostro studio sulla evoluzione di questo mondo, forse meno spettacolare e noto che non quello animale ma altrettanto affascinante. Quello vegetale, appunto.

In copertina

Tessuti di sostegno: sezione trasversale di fusto di girasole. *(Fotocolor Frezzato)*

Carlo Felice Manara

GRUPPI CRISTALLOGRAFICI PIANI. 2

Esperienze e proposte di didattica matematica. 4

7 - Abbiamo analizzato fino a questo punto i gruppi cristallografici piani le cui operazioni generatrici sono delle isometrie dirette. D'ora innanzi estenderemo la nostra analisi a tutto il gruppo MR, il quale, come si è visto, comprende anche delle isometrie che invertono il senso degli angoli.

Rifacendoci al significato di isometria inversa, di cui abbiamo parlato al paragrafo 2, risulta di facile dimostrazione la seguente:

Prop. 2 - Il prodotto di un numero pari di isometrie inverse è una isometria diretta; il prodotto di un numero dispari di isometrie inverse è una isometria inversa.

Una isometria inversa che ha particolare importanza è la *simmetria speculare* o *ribaltamento:* data nel piano una retta a chiameremo *simmetria speculare di asse* a e indicheremo con il simbolo σ (a) la isometria inversa che associa ad ogni punto P del piano il suo simmetrico P' rispetto ad a (fig. 18). Pertanto se P appartiene ad a il suo corrispondente coincide con P stesso, e quindi la retta a si presenta come luogo di punti uniti per la corrispondenza; se P non appartiene ad a, chiamato H il piede della perpendicolare calata da P su a, il punto P' sta sulla retta PH, ed è tale che si abbia

$$PH = P'H.$$

Dalla costruzione della corrispondenza σ (a) si ha che essa è *involutoria,* cioè essa soddisfa alla relazione

$$[\sigma (a)]^2 = I. \qquad (18)$$

Da quanto precede si ha poi facilmente la caratterizzazione di una isometria piana qualunque, in forza di un teorema che è la immediata generalizzazione del teorema del paragrafo 2; si ha infatti il

Teor. - Ogni isometria piana può essere ottenuta come prodotto di una rotazione ed una eventuale simmetria fissata, oppure di una traslazione e di una eventuale simmetria fissata.

Per la dimostrazione, si chiami ξ la isometria considerata. Se la ξ è una isometria diretta, allora, in forza del teorema citato del paragrafo 2, essa è già una rotazione oppure una traslazione.

Sia dunque ξ una isometria inversa. Fissata una retta a qualsivoglia, la operazione

$$\xi\, \sigma(a) = \mu \qquad (19)$$

è prodotto di due isometrie inverse e quindi una isometria diretta; quindi, per il teorema citato, μ è una rotazione oppure una traslazione.

Operiamo ora a destra su entrambi i membri della (19) con la σ(a); tenendo conto della (18) si ottiene

$$\xi = \mu\, \sigma (a) \qquad (20)$$

come si voleva.

L'analisi può tuttavia essere ulteriormente approfondita ricercando la natura del prodotto di due simmetrie. Al proposito si hanno le due proposizioni seguenti:

Prop. 3 - Il prodotto di due simmetrie σ (a), σ (b) i cui assi si incontrano in un punto O è una rotazione attorno ad O, di un angolo che è il doppio dell'angolo formato dai due assi a e b (fig. 19).

La facile dimostrazione è lasciata al lettore.

Prop. 4 - Il prodotto di due simmetrie σ (a), σ (b) i cui assi sono paralleli è una traslazione caratterizzata da un vettore che ha una lunghezza uguale al doppio della larghezza della striscia compresa tra i due assi di simmetria (fig. 20).

Anche questa dimostrazione è lasciata al lettore; è chiaro che il verso del vettore della traslazione dipende dall'ordine in cui le due simmetrie sono eseguite.

Tenendo conto di queste due proposizioni e del teorema poco sopra enunciato si otterrebbe la seguente

Prop. 5 - Ogni isometria piana si può ottenere come prodotto di non più di tre simmetrie.

Pertanto le simmetrie potrebbero essere prese come operazioni elementari della geometria elementare, e questa potrebbe essere costruita interamente utilizzando l'operazione di simmetria, come è stato fatto anche recentemente (per esempio da F. BACHMANN nel suo volume: *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff*).

A noi non interessa qui proseguire in questa direzione e pertanto dedicheremo la nostra attenzione all'analisi dei gruppi discreti che abbiamo enumerato nella prima parte di questo articolo, cercando i loro ampliamenti mediante operazioni di simmetria.

La enumerazione che faremo seguirà passo passo quella che è stata fatta nei paragrafi 5 e 6.

8 - *1a)* Gruppi discreti di rotazioni e di simmetrie. Vi è un solo gruppo discreto di questo tipo, ed è quello che si ottiene da un gruppo discreto di rotazioni, generato da una rotazione di un angolo α attorno ad un punto O, considerando la rotazione come generata da due simmetrie i cui assi formano un angolo di O/2, a norma della Prop. 3 (Cfr. ancora la fig. 19).

L'analisi dei gruppi discreti generati da una oppure due traslazioni (secondo i risultati del paragrafo 5) ed ampliati mediante simmetrie dà luogo ai seguenti casi:

2a A) gruppi generati da una traslazione e da una simmetria avente come asse una retta parallela al vettore della traslazione (fig. 21).
Si può assumere come dominio fondamentale una mezza striscia, compresa tra l'asse della simmetria e due rette parallele corrispondenti nella traslazione.

2a B) Gruppi generati da due simmetrie aventi assi paralleli.
Si può assumere come dominio fondamentale la striscia compresa tra i due assi delle simmetrie (fig. 20).

2a C) Gruppi generati da tre simmetrie: due di esse ad assi paralleli e la terza con asse perpendicolare alle prime due: ovviamente le prime due simmetrie generano una traslazione, come nel caso 2a B) (fig. 22).
Si può assumere come dominio fondamentale la mezza striscia compresa tra l'asse della terza simmetria e gli assi (paralleli tra loro) delle prime due.

2a D) Gruppi generati da una sola operazione, che consiste in una traslazione ed in una simmetria (contemporanea) che ha come asse una retta parallela al vettore della traslazione (fig. 23).
Si può assumere come dominio fondamentale la striscia compresa tra due rette che sono perpendicolari al vettore della traslazione e si corrispondono in questa.

2a E) Ai gruppi enumerati finora aggregheremo anche quello che si ottiene dal gruppo generato da due rotazioni di 180° (Cfr. sopra, paragrafo n. 3, fig. 13), ampliato con una simmetria il cui asse passa per uno dei centri di rotazione (fig. 24); come dominio fondamentale può essere assunta la mezza striscia compresa tra due rette parallele passanti per due centri di rotazione di 180° corrispondentisi nella traslazione del gruppo.

9 - Analizzeremo ora i gruppi che si ottengono dall'ampliamento dei gruppi generati da due traslazioni, presentati sopra nel paragrafo 5, n. 2b. Si hanno i seguenti casi:

2b A) Gruppi generati da due traslazioni aventi vettori di lunghezza uguale, e dalla riflessione avente come asse una diagonale del rombo generato dalle due traslazioni. Si può assumere come dominio fondamentale una metà del rombo sopra nominato (fig. 25).

2b B) Gruppi generati da due simmetrie ad assi paralleli e da una traslazione perpendicolare a questi. Gruppi di questa specie possono anche essere considerati come ampliamenti dei gruppi visti in 2a B); come dominio fondamentale si può assumere un rettangolo compreso tra gli assi delle due simmetrie e due rette corrispondentisi nella traslazione (fig. 26).

2b C) Gruppi generati da una traslazione e simmetria contemporanea avente asse parallelo a quello della traslazione e da una traslazione perpendicolare alla precedente. Questi gruppi possono essere considerati come ampliamenti di quelli presentati sopra (2a D, fig. 23). Come dominio fondamentale si può assumere un rettangolo avente come lati i vettori delle due traslazioni perpendicolari (fig. 27).
2b D) Gruppi generati da due traslazioni caratterizzate da vettori di uguale lunghezza e da due riflessioni, aventi

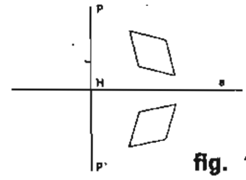


fig. 18

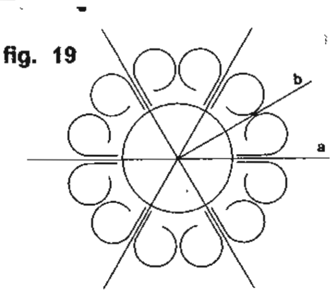
fig. 19


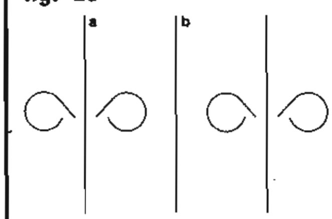
fig. 20


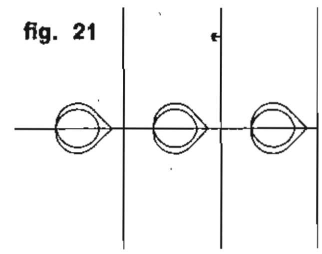
fig. 21


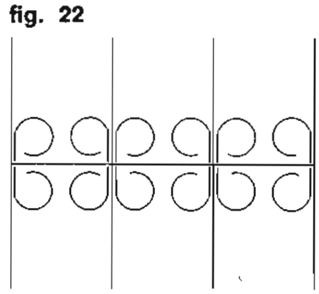
fig. 22


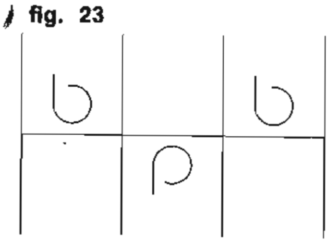
fig. 23


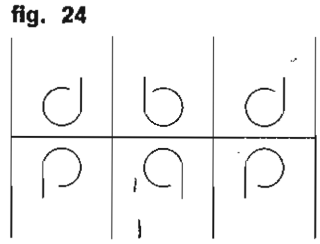
fig. 24


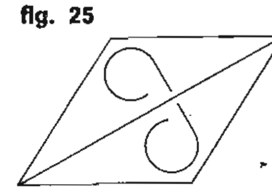
fig. 25


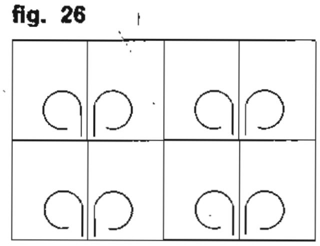
fig. 26


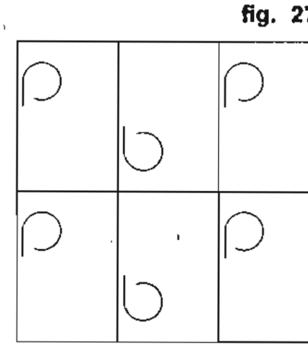
fig. 27


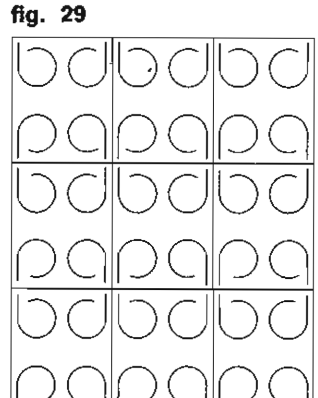
fig. 29


fig. 28


come assi le diagonali del rombo che ha come lati i vettori delle due traslazioni. Questi gruppi possono essere anche considerati come ampliamenti dei gruppi visti sopra (Cfr. 2b A, fig. 25). Come dominio fondamentale si può assumere un quarto del rombo sopra nominato (fig. 28).

2b E) Gruppi generati da due coppie di simmetrie, che generano traslazioni in direzioni perpendicolari tra loro. Come dominio fondamentale si può assumere un rettangolo, compreso tra le coppie di assi di simmetria nominati (fig. 29).

2b F) Gruppi generati da due rotazioni di 180° e da una simmetria avente come asse una retta parallela alla congiungente i due centri di rotazione. Come dominio fondamentale si può assumere un rettangolo i cui lati sono paralleli alla congiungente i due centri di rotazione e all'asse di simmetria (fig. 30).

2b G) Gruppi generati da una traslazione con simmetria contemporanea, avente come asse una retta parallela al vettore della traslazione e da una simmetria avente come asse una retta parallela al vettore della traslazione. Come dominio fondamentale si può assumere un rettangolo avente i lati paralleli ai due vettori che caratterizzano le traslazioni (fig. 31).

È così esaurita la discussione dei gruppi che sono ampliamenti dei gruppi generati da traslazioni o da rotazioni di 180°. Nel prossimo paragrafo analizzeremo i gruppi che si ottengono ampliando con simmetrie i gruppi di rotazioni, analizzati nel paragrafo 6.

10 - *3a A)* Consideriamo anzitutto i gruppi analizzati in 3a). Essi sono generati da due rotazioni di 120° e pertanto in forza dell'analisi svolta nel paragrafo 3, essi contengono anche delle traslazioni; i domini fondamentali di queste traslazioni sono dei rombi, che bene appaiono nella fig. 15. Questi gruppi possono essere ampliati mediante delle riflessioni che hanno come assi di simmetria la diagonale minore oppure la maggiore del rombo in oggetto; si ottengono rispettivamente dei gruppi discreti i cui domini fondamentali sono illustrati dalle figure 32 e 33.

3b A) In secondo luogo consideriamo i gruppi analizzati in 3b). Come operazioni generatrici di questi gruppi possono essere prese due rotazioni: una di 90° ed una di 180° e come dominio fondamentale può essere assunto un quadrato, come si ha dalla figura 16. Ciascuna di queste rotazioni può essere considerata ottenuta come prodotto di due simmetrie i cui assi formano un angolo di 45° oppure rispettivamente di 90°. Si ottengono dei domini fondamentali che sono dati rispettivamente dalle figure 34 e 35.

3c A) Infine, per quanto riguarda i gruppi analizzati in 3c, ricordiamo che essi possono considerarsi generati da due rotazioni, una di 60° e l'altra di 180°. Ognuna di queste rotazioni può essere ottenuta come prodotto di due simmetrie e si verifica facilmente che si ottiene un unico tipo di gruppi ampliati; come domini fondamentali si possono assumere quelli illustrati nella fig. 36.

11 - Abbiamo così concluso la presentazione dei gruppi discreti di isometrie piane; non vogliamo insistere sulle opportunità che questi argomenti possono offrire all'insegnante per dare dei contenuti alle strutture gruppali e per rendere interessante, anche (in una certa misura) dal punto di vista estetico, la lezione di matematica; ci limitiamo ad osservare che, volendo, si possono trovare moltissime altre occasioni per mostrare con i fatti che questa scienza non è astratta e distaccata dal mondo reale, ma costituisce uno dei mezzi più potenti per descrivere la realtà, per analizzarla e per conoscerla.

fig. 30

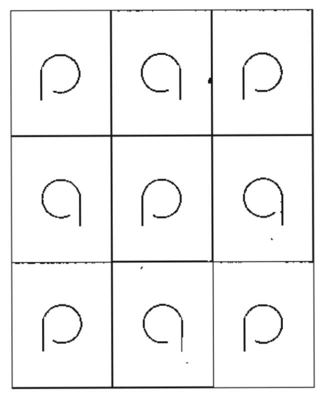


fig. 31

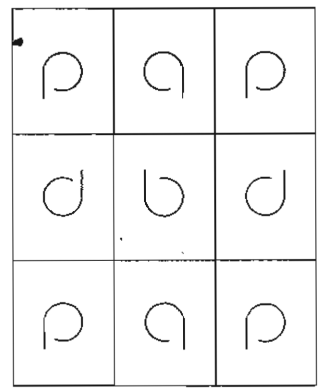


fig. 32

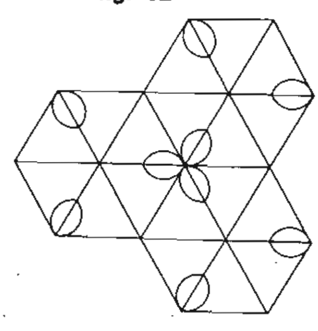
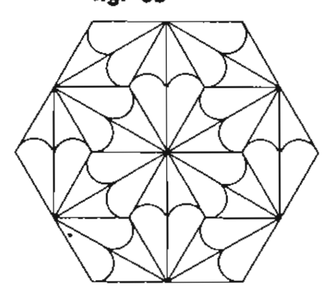


fig. 33



EDUCARE CON L'IMMAGINE - *panorama metodologico di educazione all'immagine e con l'immagine,* di Nazareno Taddei, ed CiSCS, Roma, 1976, 2 volumi indivisibili per complessive pp. 405, L. 6.000 (4ª edizione interamente rifatta).

Il titolo « educare con l'immagine » può suscitare qualche perplessità sull'opportunità di parlare di questo « panorama metodologico » in relazione alla didattica della matematica: ritengo quindi particolarmente opportuno dare preliminarmente alcune indicazioni sul contenuto dei due volumi.

Vol. I - *Parte prima: problemi dell'educazione moderna* - Il concetto di educazione all'immagine e con l'immagine - La scuola extrascuola - Le nuove tecnologie di apprendimento - Istruzione ed educazione. *Parte seconda: Il sostrato semiologico: Dalla comunicazione all'immagine tecnica - Sezione Prima: La comunicazione* - Teoria della comunicazione e teoria dell'informazione - La comunicazione - Il comunicante e i suoi rapporti di « conoscenza » e di « espressione ». *Sezione seconda: Il segno e la sua capacità espressiva* - Concetto e caratteristiche del segno - I fat-

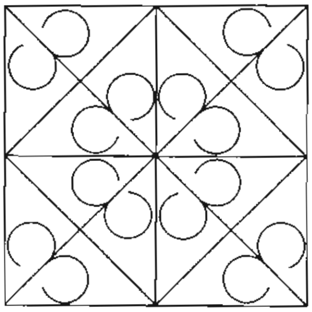


fig. 34

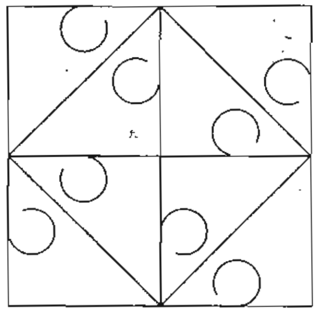


fig. 35

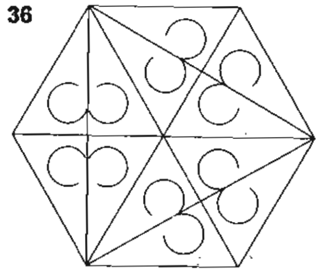


fig. 36

tori dell'espressività. *Sezione terza: L'immagine tecnica e la comunicazione di massa* - L'immagine tecnica - Deformazioni dell'immagine tecnica e comunicazioni inavvertite - Il recettore - Mass media e audiovisivi - L'approccio semiologico.
Vol. II - *Parte terza: Educazione all'immagine (mass media)* - Comunicazione di massa e sue caratteristiche - Il criterio della liberazione: la lettura strutturale - La valutazione dell'immagine tecnica - Iniziative di educazione all'immagine. *Parte quarta: Educazione con l'immagine (audiovisivi)* - Un insegnamento nuovo - L'istruzione - La strategia dell'algoritmo - La programmazione cibernetica - L'algoritmo « contornuale » e le sue formule - L'« usare » e il « fare » l'immagine.
I titoli dei capitoli, delle sezioni, delle parti mostrano chiaramente che, sia pure con riferimento all'educazione all'immagine, ciò che interessa all'Autore è la metodologia didattica, in una visione che nella *conclusione* è sintetizzata nella seguente affermazione: « L'insegnante deve essere uno specialista *dell'insegnare.* E per insegnare, oggi, bisogna conoscere i risultati delle varie scienze afferenti all'insegnamento e all'educazione; ma insieme bisogna aver pratica del mettere in esercizio quei risultati » (pp. 371-372).
Nei due volumi è, appunto, sviluppata una metodologia basata su questi risultati, considerati criticamente e indipendentemente dalle « mode », che è valida non solo per gli audiovisivi come oggetto di insegnamento ma anche per qualsiasi materia: con questo intendo, ovviamente, non sminuire l'importanza delle applicazioni della metodologia all'educazione all'immagine ma indicare come queste possano essere considerate anche a livello di esempio indiretto per applicazioni ad altre materie.
La metodologia elaborata e proposta dall'Autore (che già l'aveva presentata in altre pubblicazioni e in corsi del CISCS) è, a mio avviso, particolarmente importante ed efficace sia per il rigore dell'impostazione scientifica sia per la rispondenza a esigenze attuali anche per il ruolo attribuito alla « comunicazione cibernetica » e al « linguaggio dell'immagine » in vista della « programmazione », della « strategia dell'algoritmo », dell'« usare » e del « fare » l'immagine.
Avendo già più volte e in diverse sedi affermato la mia piena adesione alla metodologia di N. Taddei, nella quale ho trovato un fondamentale riferimento per la metodologia didattica da affiancare alla visione della matematica per gli studi e le attività relative all'insegnamento della matematica, non mi resta che esortare i lettori interessati a questo « panorama metodologico » a non scoraggiarsi di fronte alle probabili difficoltà di reperimento immediato dei due volumi in libreria: questi possono essere ordinati tramite qualsiasi libreria o, con la piccola complicazione delle spese postali, richiesti direttamente al CISCS (Via Siria, 20 - 00179 Roma).

Gabriele Lucchini

Notiziario

*** Il n. 12 del 1976 (dicembre) del *Notiziario della Unione Matematica Italiana* pubblica diverse notizie che possono interessare gli Insegnanti. In particolare segnaliamo:
I) la decisione della Commissione scientifica dell'U.M.I. di farsi promotrice della pubblicazione di una raccolta antologica comprendente esposizioni tenute ai convegni di Exter, Lione e Karlsruhe (p. 7);
II) il « documento della commissione scientifica dell'U.M.I. sulla riforma della scuola secondaria superiore e sulla revisione della scuola dell'obbligo » (pp. 12-17);
III) i testi dei cinque problemi assegnati alla terza « U.S.A. Mathematical Olympiad » (p. 39);
IV) « modifiche all'ordinamento della scuola media » (pp. 41-44).
*** Il n. 7 del 1976 di *L'insegnamento della matematica* (settembre) pubblica l'articolo « Fotografia e trasformazioni geometriche » annunciato sul n. 65 di *Didattica delle Scienze* (p. 11).
*** Dal 5 all'8 aprile 1977 è previsto a Lier il XVI congresso internazionale del *Centre Belge de Pédagogie de la Mathématique* sul tema « Pédagogie des démonstrations ».

Nuovo ordinamento della scuola secondaria superiore e insegnamento della matematica

(g.l. 19-2-1977) Nella riunione del 14 gennaio 1977 il Consiglio dei Ministri ha approvato il disegno di legge presentato dal Ministro Malfatti per la riforma della istruzione secondaria superiore.
La stampa ha già pubblicato notizie e commenti in merito, e, visto che qui interessa essenzialmente il discorso relativo alla Matematica, non pare quindi necessario soffermarsi a richiamare lo schema del disegno di legge se non per ricordare quella che è sicuramente la più grossa sorpresa: mentre sembrava ormai concorde da anni l'orientamento su un primo biennio della scuola superiore destinato a completare la scuola dell'obbligo (e diversi esperimenti in tal senso sono ancora in corso), è ora previsto « un anno di consolidamento della preparazione di base e dell'orientamento » e « un quadriennio successivo » (art. 1).
Questa sorpresa è sicuramente di portata tale da mettere in ombra l'articolazione in « area comune » (che « oltre agli aspetti generali dell'educazione, comprende insegnamenti relativi ai seguenti ambiti: linguistico-letterario-artistico; logico-matematico; scientifico; tecnologico ») e « aree specifiche » (« linguistico-letteraria; delle scienze filosofiche-storiche - umane - sociali-giuridiche-economiche; delle scienze naturali-fisiche-matematiche e delle tecnologie; delle arti »), almeno per quanto riguarda la Matematica: sono ben note, e *Didattica delle Scienze* ne ha dato notizia, le iniziative di sperimentazione sul biennio portate avanti nell'ambito di un contratto tra Consiglio Nazionale delle Ricerche e Unione Matematica Italiana, e pochi mesi fa la Commissione Scientifica dell'Unione Matematica Italiana aveva approvato un documento « sulla riforma della scuola secondaria superiore e sulla revisione della scuola dell'obbligo » (*Notiziario della Unione Matematica Italiana,* dicembre 1976, pp. 12-17), segnalato più sopra.
Avendo saputo che la Commissione Scientifica dell'Unione Matematica Italiana e la Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica stanno per pubblicare un documento sul disegno di legge, documento che *Didattica delle Scienze* si propone di far conoscere integralmente ai Lettori, rimandiamo commenti e osservazioni sul disegno di legge, in particolare per quanto riguarda il ruolo della Matematica e i relativi programmi di insegnamento (commenti e osservazioni che serviranno anche di risposta alla lettera della prof.ssa Paola Giliani Crovato pubblicata sul n. 67 di *Didattica delle Scienze,* p. 11), limitandoci per ora a richiamare il problema specifico della preparazione matematica dei maestri di scuola elementare.